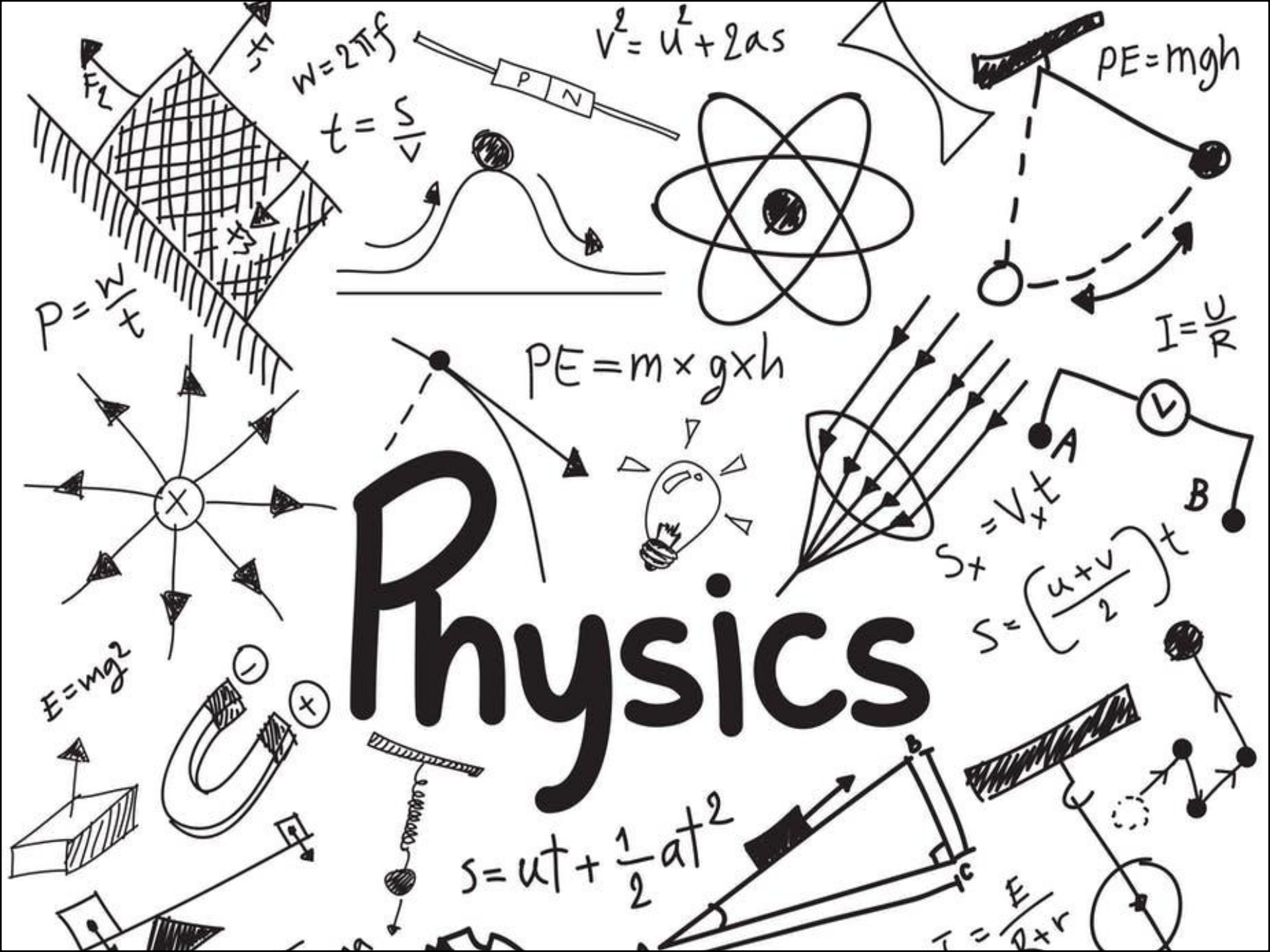

Physics
w=2πf
v² = u² + 2as
PE=mgh
t = s/v
P = W/t
PE = m × g × h
I = U/R
A
B
Sx = Vx t
S = ((u+v)/2) t
E=mg²
s = ut + ½at²
I = E/(R+r)

Reminder…

- **Διαλέξεις**
  - **Προαιρετική** παρουσία!
  - Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
  - Δεν υπάρχουν απουσίες
  - Υπάρχει **σεβασμός** στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
  - **COVID attention**: προσέρχεστε με τα απαραίτητα δικαιολογητικά
  - **Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας**: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά

Εικόνα: Σταγόνες νερού που πέφτουν από ύψος επάνω σε μια επιφάνεια νερού προκαλούν την ταλάντωση της επιφάνειας. Αυτές οι ταλαντώσεις σχετίζονται με κυκλικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο που πέφτουν οι σταγόνες.

Φυσική για Μηχανικούς

Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Εικόνα: Σταγόνες νερού που πέφτουν από ύψος επάνω σε μια επιφάνεια νερού προκαλούν την ταλάντωση της επιφάνειας. Αυτές οι ταλαντώσεις σχετίζονται με κυκλικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο που πέφτουν οι σταγόνες.

Φυσική για Μηχανικούς

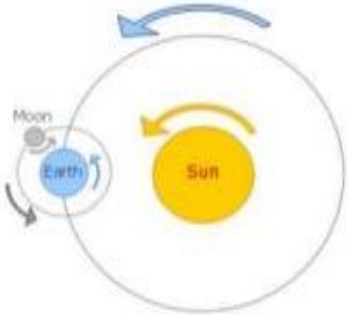
Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

- **Περιοδική κίνηση: ονομάζεται η κίνηση ενός σώματος που επιστρέφει στην αρχική του θέση ανά τακτά, σταθερά χρονικά διαστήματα**

  - Πολλά παραδείγματα από την καθημερινότητα
    - Δείκτες ρολογιού
    - Κίνηση Γης γύρω από Ήλιο
    - Διαλέξεις Φυσικής ☺
    - Τροχιά δορυφόρου γύρω από τη Γη



  - Μαθηματικός ορισμός: $f(t) = f(t+T),\ T > 0, \forall\, t > 0$,

    με T να ονομάζεται **περίοδος** της κίνησης

Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

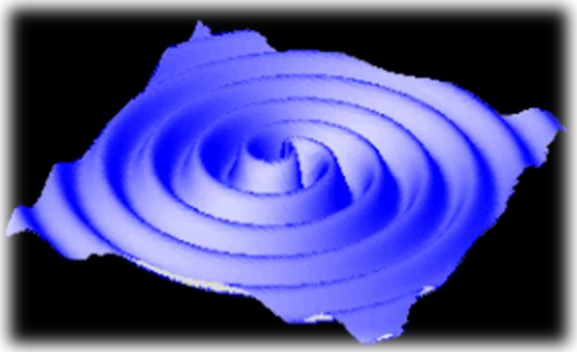
- Πολλά φυσικά φαινόμενα γίνονται κατανοητά μέσα από τις έννοιες των ταλαντώσεων και των κυμάτων

- **Παραδείγματα**:
  - Οι ουρανοξύστες και οι γέφυρες σχεδιάζονται έτσι ώστε να μπορούν να ταλαντώνονται
  - Η **ραδιοφωνία και η τηλεόραση** βασίζουν τη λειτουργία τους σε ηλεκτρομαγνητικά κύματα και στον τρόπο διάδοσής τους
  - Η Φυσική στο ατομικό της επίπεδο περιέχει πληροφορία που φέρεται από κύματα
  - Ο **ήχος και η φωνή** παράγονται από κάποιου είδους ταλαντώσεις (χορδών, μεμβρανών, κλπ)

Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

- **Κύμα**: ονομάζεται μια διαταραχή που μεταδίδεται στο χώρο και το χρόνο
  - Τα κύματα είναι περιοδικά φαινόμενα
  - Αυτό που επαναλαμβάνεται είναι η διαταραχή

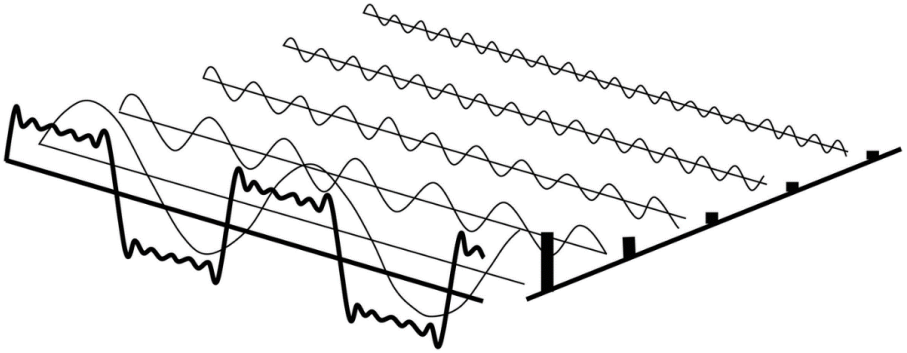
- Ο όρος «κύμα» χαρακτηρίζει τη μεταφορά της διαταραχής συνήθως διαμέσου ενός μέσου
  - Π.χ. μόρια νερού, στοιχεία νήματος, μόρια αέρα



- **Μηχανικό κύμα**: κύμα που απαιτεί κάποιο μέσο για τη διάδοσή του

Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

- Όλες οι περιοδικές κινήσεις (και άρα και τα κύματα) μπορούν να μοντελοποιηθούν ως άθροισμα **απλών αρμονικών κινήσεων**



- **Απλή αρμονική κίνηση**: περιοδική κίνηση που συμβαίνει συχνά σε μηχανικά συστήματα, όταν η δύναμη που ασκείται στο σύστημα είναι
  (α) **ανάλογη της θέσης του συστήματος**, σε σχέση με μια θέση ισορροπίας, και
  (β) με κατεύθυνση **προς τη θέση ισορροπίας**

Εικόνα: Σταγόνες νερού που πέφτουν από ύψος επάνω σε μια επιφάνεια νερού προκαλούν την ταλάντωση της επιφάνειας. Αυτές οι ταλαντώσεις σχετίζονται με κυκλικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο που πέφτουν οι σταγόνες.

Φυσική για Μηχανικούς

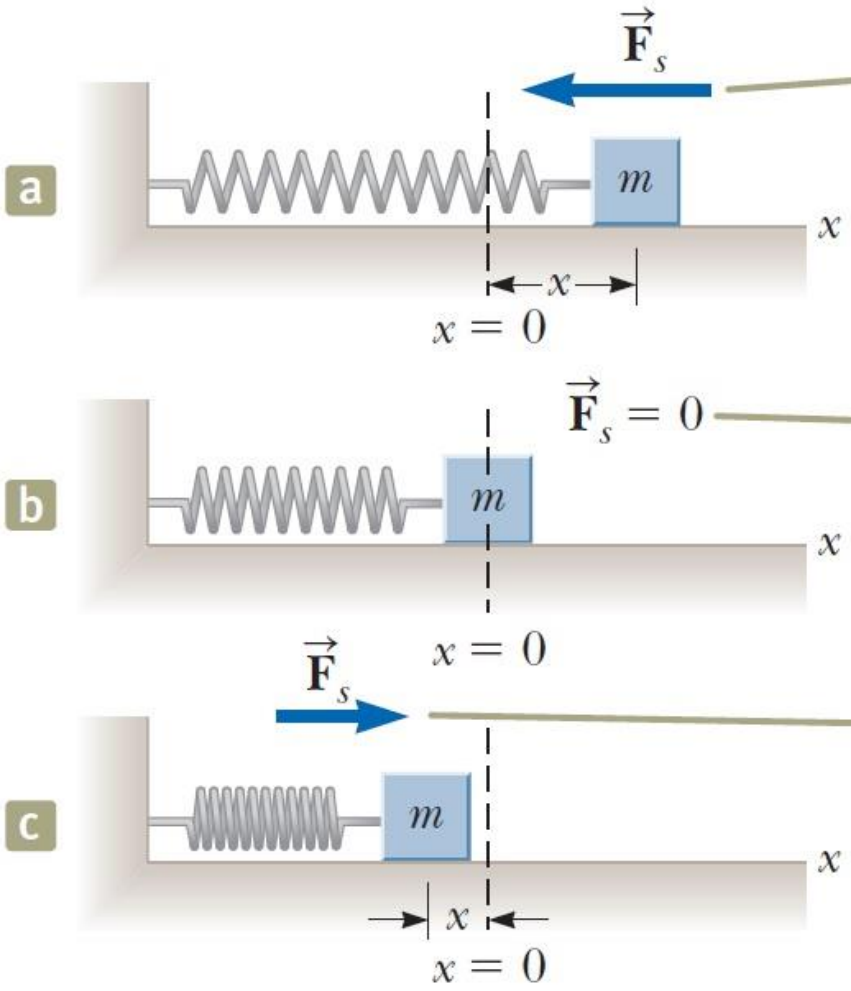
Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **<u>Ορισμός:</u> Όταν η δύναμη που ασκείται σε ένα σύστημα έχει πάντα κατεύθυνση προς τη θέση ισορροπίας του συστήματος, η κίνηση που πραγματοποιεί το σύστημα λέγεται Απλή Αρμονική Κίνηση / Ταλάντωση (ΑΑΤ)**
  - Γνωρίζετε ήδη μια τέτοια κίνηση (ποια;) ☺

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

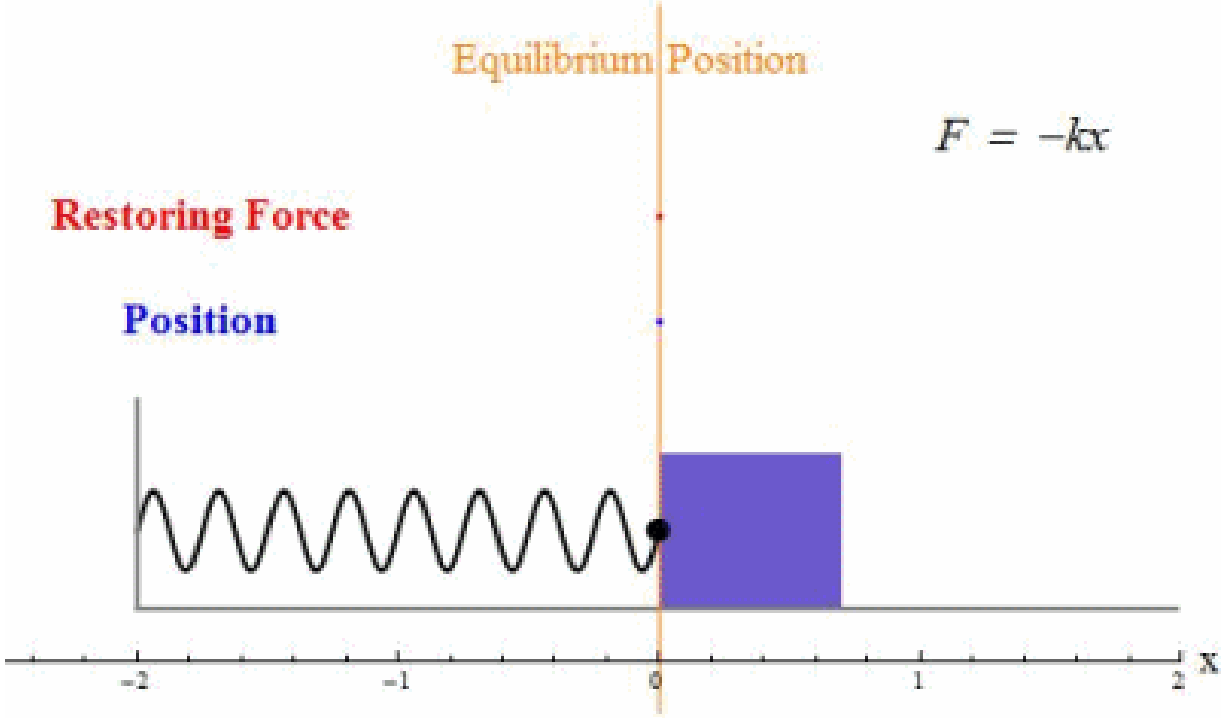


Όταν το σώμα μετατοπίζεται προς τα δεξιά της θέσης ισορροπίας, η δύναμη που αναπτύσσεται από το ελατήριο στο σώμα δρα με κατεύθυνση προς τα αριστερά.

Όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του, η δύναμη που αναπτύσσεται από το ελατήριο είναι μηδενική.

Όταν το σώμα μετατοπίζεται προς τα αριστερά της θέσης ισορροπίας, η δύναμη που αναπτύσσεται από το ελατήριο δρα με κατεύθυνση προς τα δεξιά.

Απλή Αρμονική Ταλάντωση



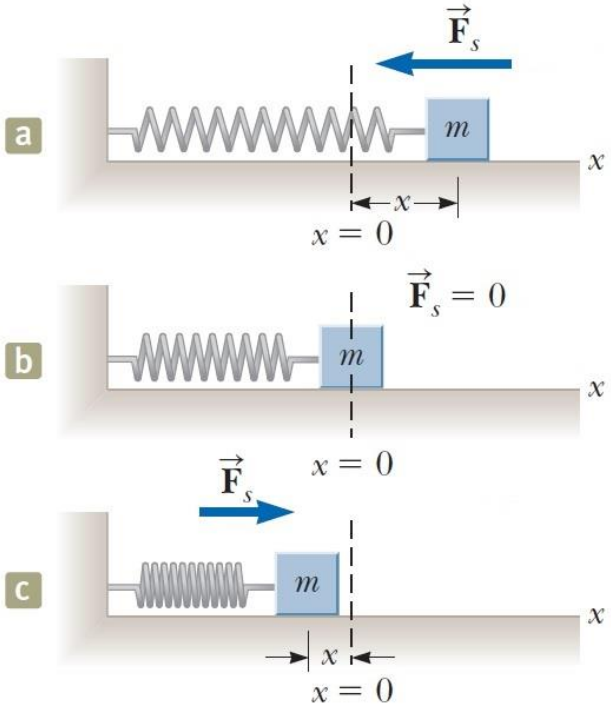
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Μοντελοποίηση: σώμα υπό επίδραση δύναμης

$$\sum F_x = ma_x \Leftrightarrow F_s = -kx = ma_x \Leftrightarrow a_x = -\frac{k}{m}x$$

- **Η επιτάχυνση είναι ανάλογη της θέσης (μετατόπισης από θέση ισορροπίας)**

- **Η κατεύθυνσή της είναι αντίθετη της μετατόπισης από τη θέση ισορροπίας**



Απλή Αρμονική Κίνηση

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Εξισώσεις απλής αρμονικής ταλάντωσης**

$$a_x = -\frac{k}{m}x \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

- Αν θέσουμε $\omega^2 = \frac{k}{m}$, τότε έχουμε

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x}$$

Διαφορική εξίσωση

- Λύση διαφορικής εξίσωσης

Φάση

Φάση μετατόπισης ή αρχική φάση

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

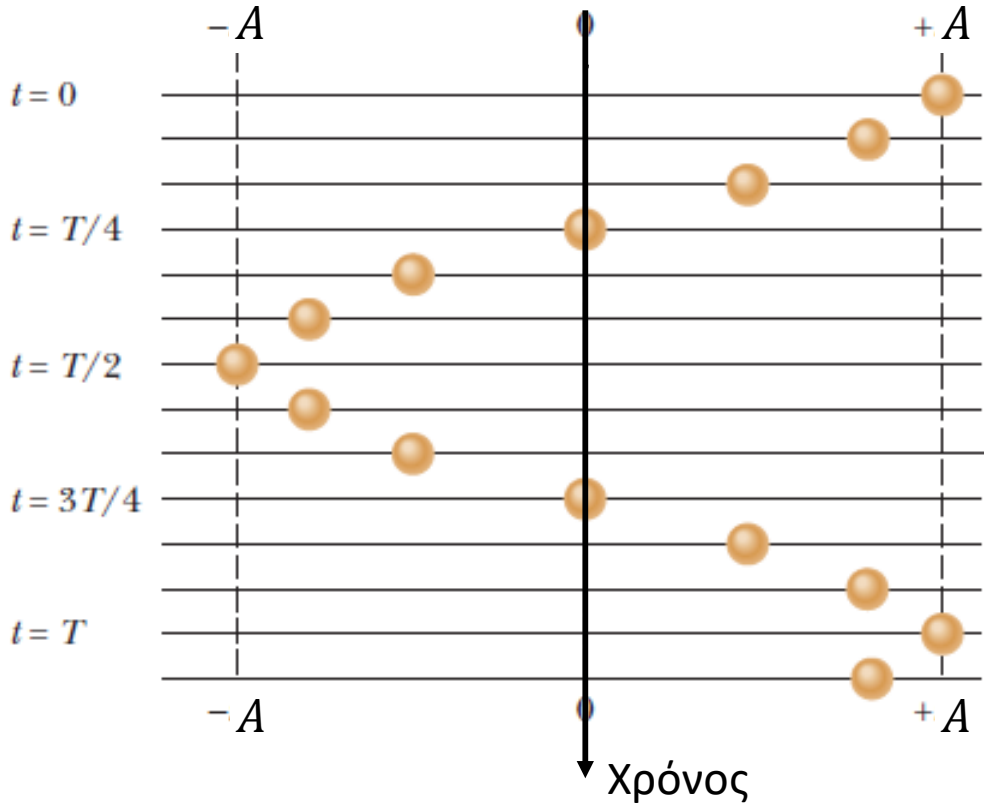
Πλάτος ταλάντωσης

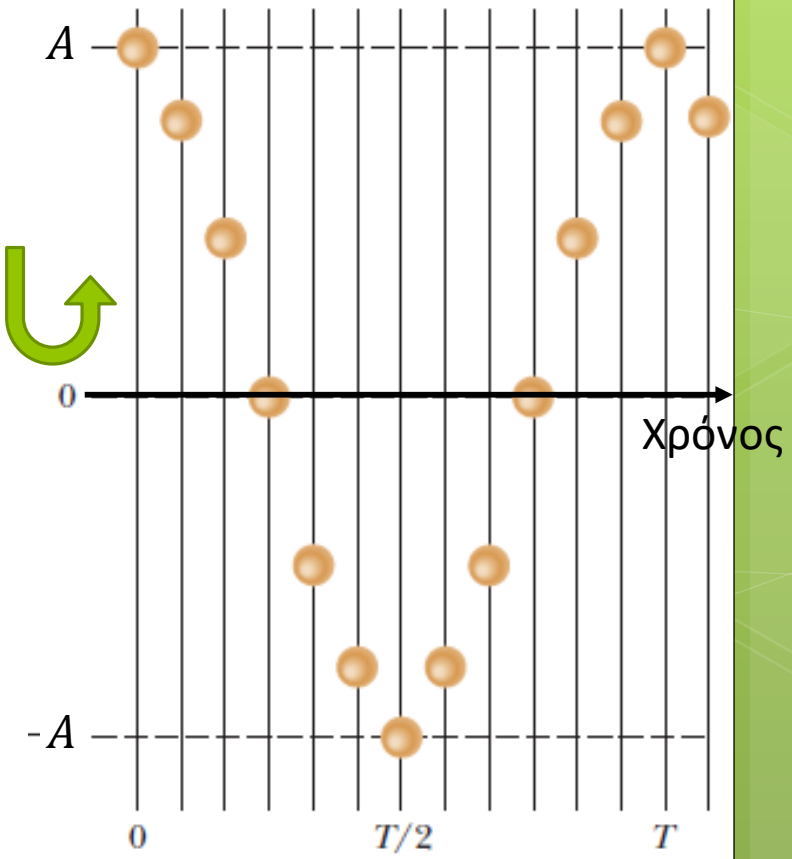
Συχνότητα ταλάντωσης

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

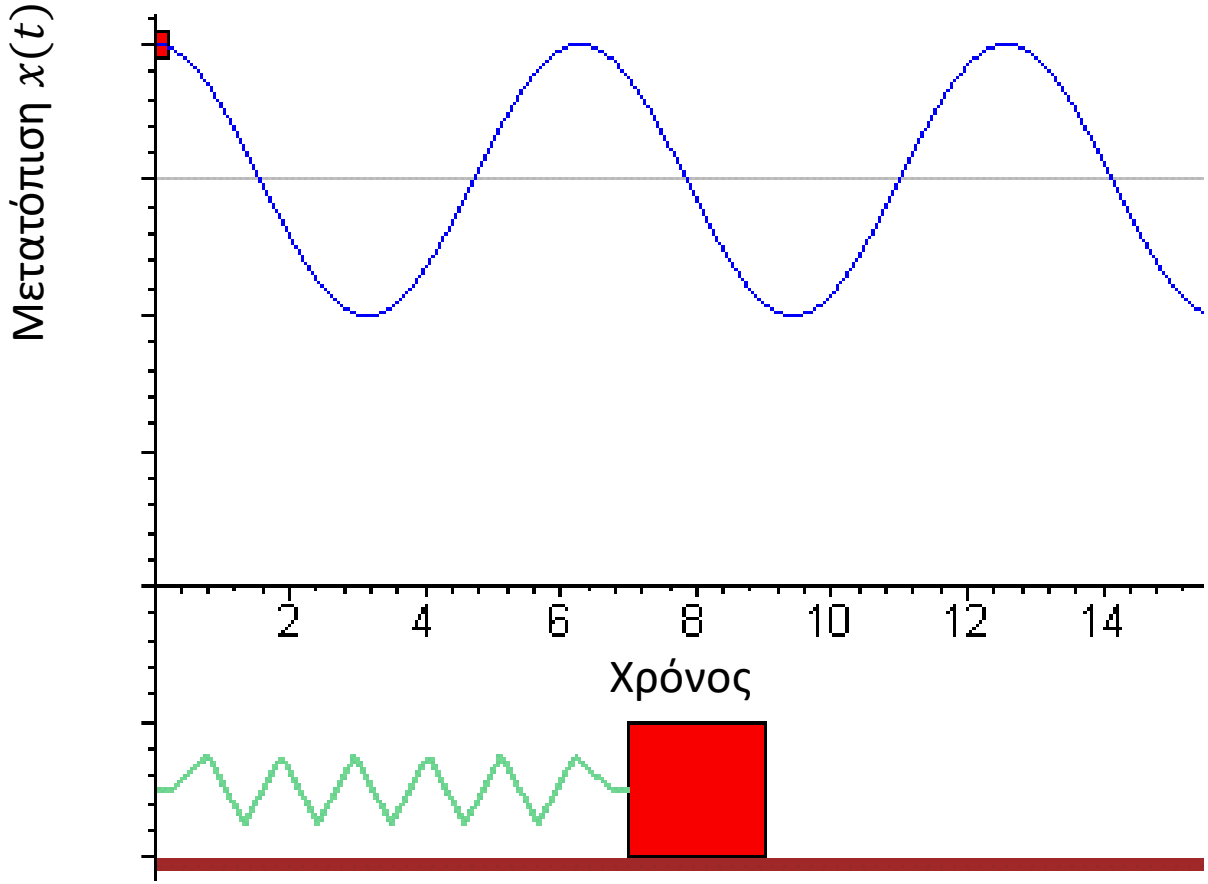
Ένα σώμα ταλαντώνεται δεξιά κι αριστερά ακολουθώντας απλή αρμονική ταλάντωση.

Αν "στρέψουμε" την κίνηση κατακόρυφα, παρατηρούμε οτι σχηματίζεται ένα συνημίτονο!





Απλή Αρμονική Ταλάντωση



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Αφορούν μόνο σύστημα ελατηρίου-σώματος

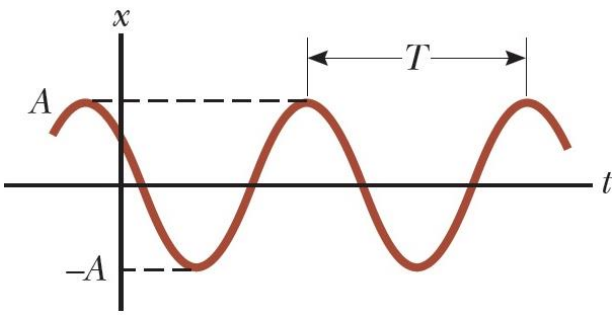
- **Γωνιακή Συχνότητα ταλάντωσης**

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

  - Μετριέται σε rad/s
  - Ορίζει πόσο γρήγορα ταλαντώνεται το σύστημα

- **Περίοδος**

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



  - Χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη ταλάντωση

- **Συχνότητα (σε Hertz)**

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

  - Δηλώνει το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελούνται στη μονάδα του χρόνου

- **Σχέση με γωνιακή συχνότητα**

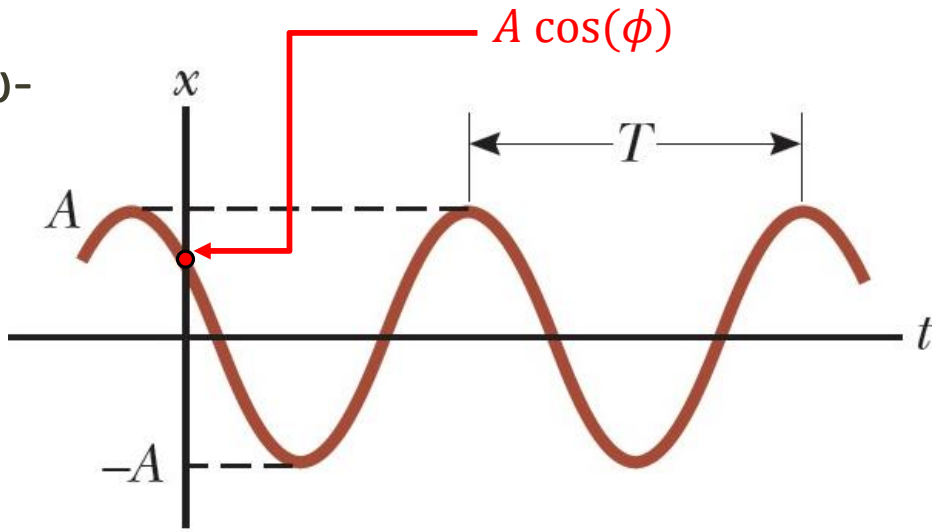
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

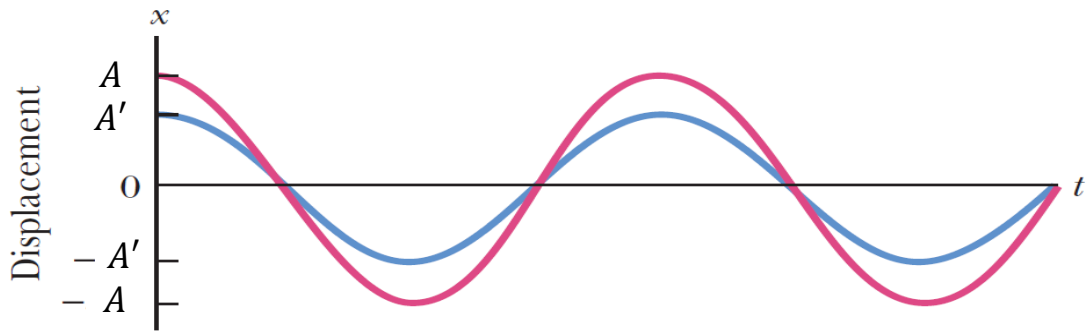
- **Σταθερά αρχικής φάσης φ**

- Ορίζει την τιμή του συνημιτόνου τη στιγμή $t = 0$
  - $t = 0 \Rightarrow x(0) = A\cos(\varphi)$
  - Ορίζει τη θέση του σώματος όταν ξεκινάμε να μελετάμε την ταλάντωση

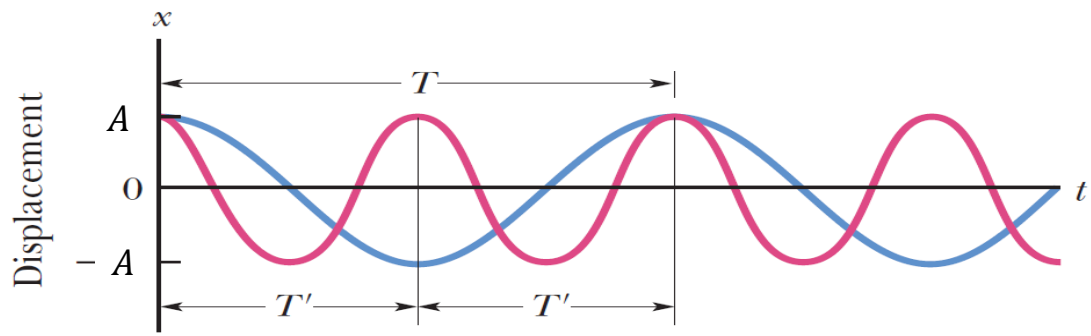


Απλή Αρμονική Ταλάντωση

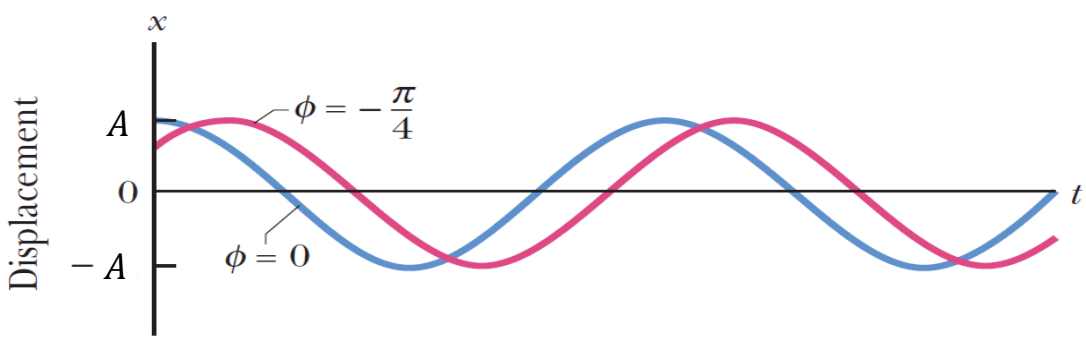
Quiz:
Ποια/ες από τις παραμέτρους της ταλάντωσης A, ω, ϕ μένουν ίδιες σε κάθε ζεύγος?



Ίδια ϕ, ω
Διαφορετικό A



Ίδια A, ϕ
Διαφορετικό ω



Ίδια A, ω
Διαφορετικό ϕ

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Αφορούν μόνο σύστημα ελατηρίου-σώματος

- **Ταχύτητα & επιτάχυνση** απλής αρμονικής κίνησης

$$u = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = u(t)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = a(t)$$

- Μέγιστες τιμές

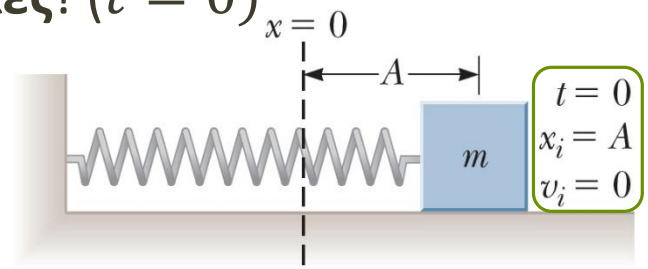
$$u_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} A \qquad a_{max} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

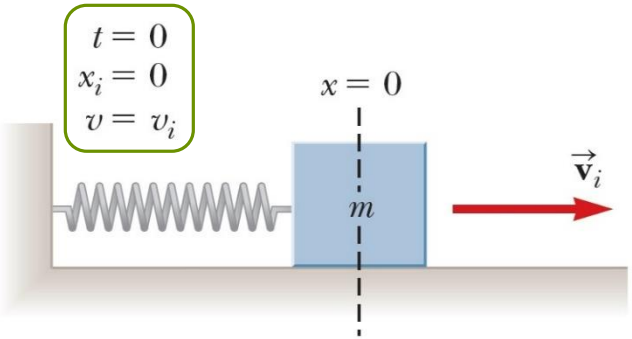
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$
$$u(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

- **Πώς βρίσκουμε τις σταθερές A, φ, ω, της ταλάντωσης;**
  - Συχνότητα ω: εξαρτάται από k, m
  - Πλάτος, αρχ. φάση: **αρχικές συνθήκες**! $(t = 0)$
  - **Παράδειγμα 1**:
    - $x(0) = A\cos(\varphi) = A$,
    - $u(0) = -\omega A \sin(\varphi) = 0$
      - Δίνουν $\varphi = 0$

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$



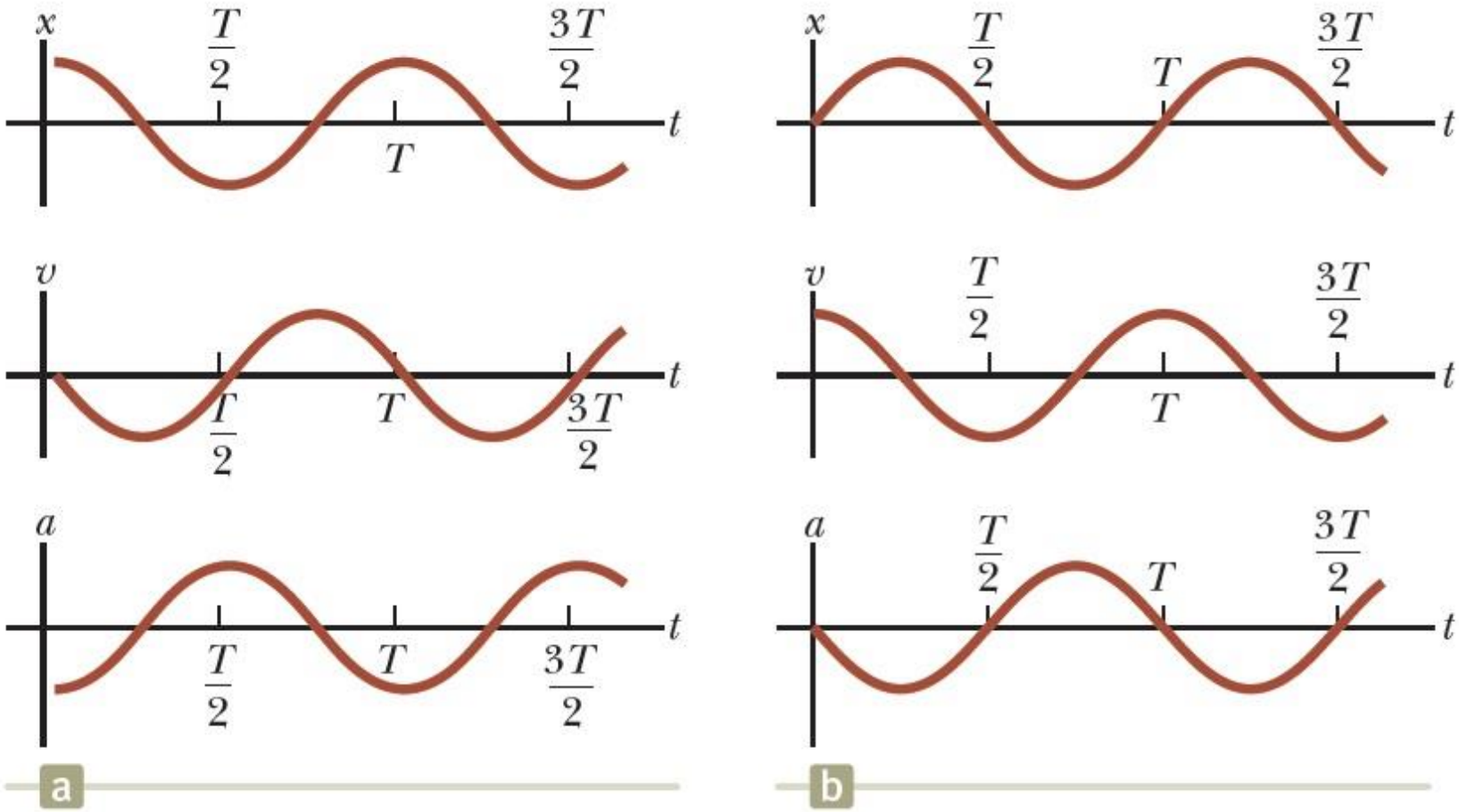
  - **Παράδειγμα 2**:
    - $x(0) = A\cos(\varphi) = 0$, → $\pi/2$, $-\pi/2$
    - $u(0) = -\omega A \sin(\varphi) = u_i$
      - Δίνουν $\varphi = -{}^{\pi}/_{2}$



Για $\varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \frac{u_i}{\omega}$

$$x(t) = \frac{u_i}{\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{u_i}{\omega}\sin(\omega t)$$

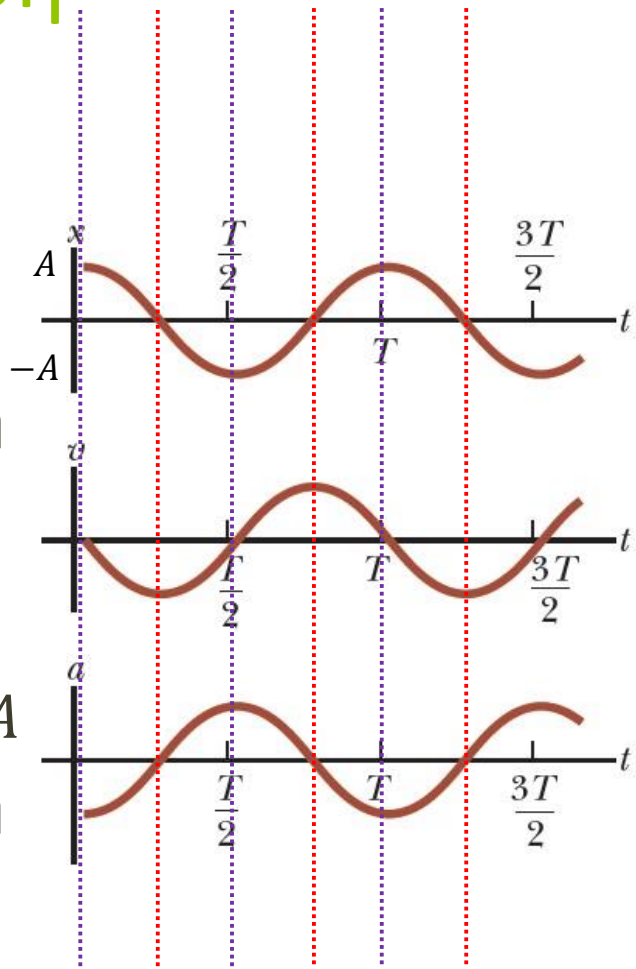
Απλή Αρμονική Ταλάντωση



Θέση, ταχύτητα, επιτάχυνση για (a) $t = 0, x(0) = A, u(0) = 0$ και (b) $t = 0, x(0) = 0, u(0) = u_i$

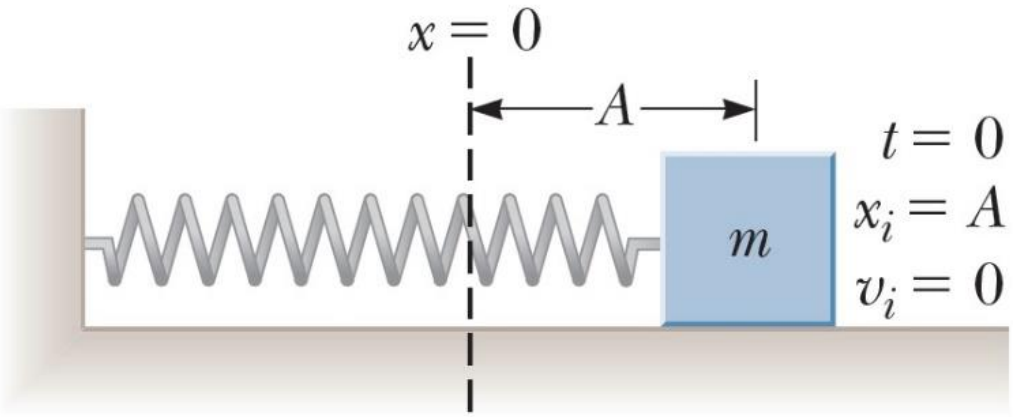
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Παρατηρήστε ότι:
- Η **μέγιστη** (κατ' απόλυτη τιμή) **ταχύτητα** συμβαίνει όταν $x = 0$
  - Δηλ. όταν το σύστημα βρίσκεται στη **θέση ισορροπίας** του!
- Η **μέγιστη** (κατ' απόλυτη τιμή) **επιτάχυνση** συμβαίνει όταν $x = \pm A$
  - Δηλ. όταν το σύστημα βρίσκεται στη **μέγιστη (κατ' απόλυτη τιμή) απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του**!



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Παράδειγμα:**
  - Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.
    - Α) Βρείτε την περίοδο της κίνησης.
    - Β) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.
    - Γ) Βρείτε τη μέγιστη επιτάχυνση του σώματος.
    - Δ) Γράψτε όλες τις εξισώσεις κίνησης.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

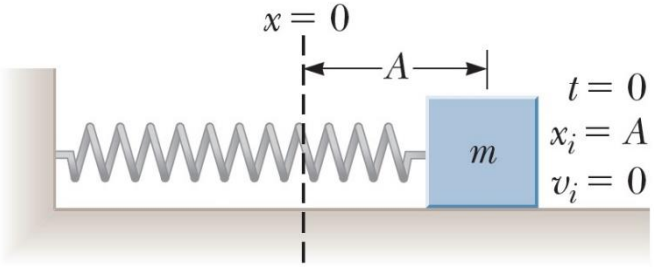
- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.
    - Α) Βρείτε την περίοδο της κίνησης.
    - Β) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.
    - Γ) Βρείτε τη μέγιστη επιτάχυνση του σώματος.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5}{0.2}} = 5\ \frac{rad}{s} \quad (1)$$

A) $T = \frac{2\pi}{\omega} \overset{(1)}{=} \frac{2\pi}{5}\ sec$

B) $u_{max} = \omega A = 5 \cdot 0.05 = 0.25\ \frac{m}{s}$

Γ) $a_{max} = \omega^2 A = 5^2 \cdot 0.05 = 1.25\ \frac{m}{s^2}$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.
    - Δ) Γράψτε όλες τις εξισώσεις κίνησης.

Ξέραμε ότι $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos(5t + \varphi)$.

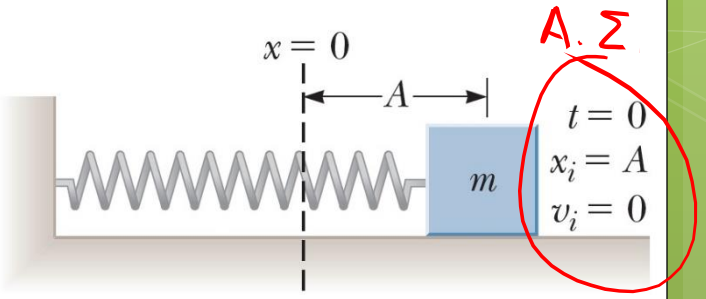
Θέτω $t = 0 \Rightarrow x(0) = A\cos(0 + \varphi) = A\cos(\varphi) \overset{\text{Α.Σ.}}{=} A \Rightarrow \varphi = 0$

Άρα $x(t) = A\cos(5t) = 0.05\cos(5t)$

Παραγωγίζοντας:

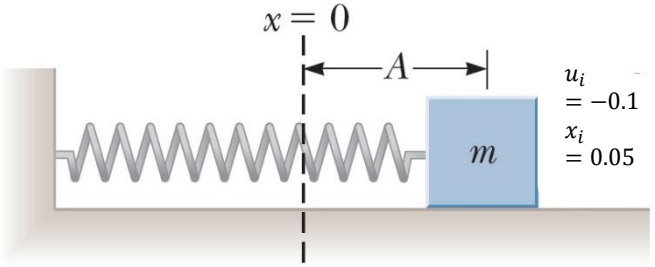
$u(t) = -0.25\sin(5t)$

$a(t) = -1.25\cos(5t)$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Παράδειγμα:**
  - Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται **με αρχική ταχύτητα $u_i = -0.1$ m/s**
    - Τι αλλάζει στα προηγούμενα ερωτήματα?



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται **με αρχική ταχύτητα $u_i = -0.1$ m/s**
    - Τι αλλάζει στα προηγούμενα ερωτήματα?

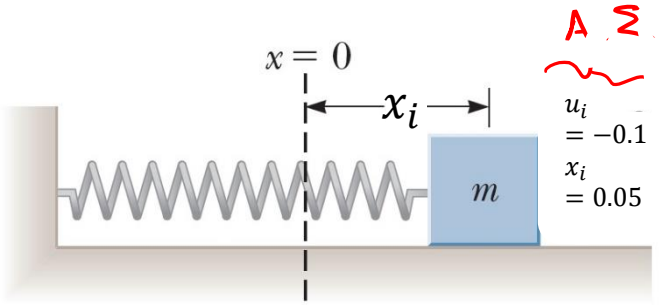
Α) Περίοδος: $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 5 \frac{rad}{s}$, άρα $T = \frac{2\pi}{5}$ s

Β) $u_{max} = \omega A = 5A$? δε γνωρίζω το A.

Γ) $a_{max} = \omega^2 A = 25A$? —— " ——

Δ) Ξέραμε ότι

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A\cos(5t+\varphi) \\ u(t) &= -\omega A \sin(5t+\varphi) \end{aligned}\right\} \xrightarrow{t=0}$$



Α Σ

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

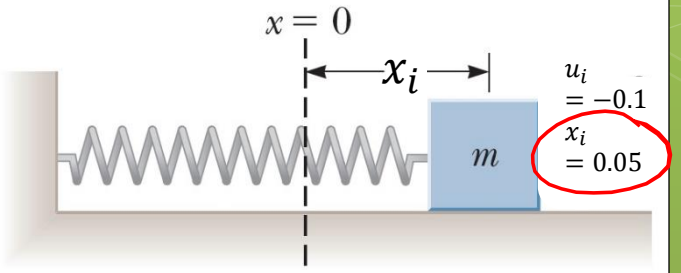
- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται **με αρχική ταχύτητα $u_i = -0.1$ m/s**
    - Τι αλλάζει στα προηγούμενα ερωτήματα?

$$\xrightarrow{t=0} \begin{cases} x(0) = A\cos(\varphi) = 0.05 \\ u(0) = -\omega A \sin(\varphi) = -0.1 \end{cases} \quad \begin{cases} A\cos(\varphi) = 0.05 \\ 5A\sin(\varphi) = 0.1 \end{cases} \xrightarrow{(:)}$$

$$\xrightarrow{(:)} \frac{5\cancel{A}\sin\varphi}{\cancel{A}\cos\varphi} = \frac{0.1}{0.05} \Leftrightarrow 5\tan(\varphi) = 2 \Rightarrow \tan(\varphi) = \frac{2}{5}$$

Βρίσκαμε ότι $\varphi \cong 0.12\pi$ rad

Άρα $A\cos(0.12\pi) = 0.05 \Rightarrow$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται **με αρχική ταχύτητα $u_i = -0.1$ m/s**
    - Τι αλλάζει στα προηγούμενα ερωτήματα?

$$\Rightarrow A = \frac{0.05}{\cos(0.12\pi)} \simeq 0.054 \text{ m}.$$ Αρα τελικά:

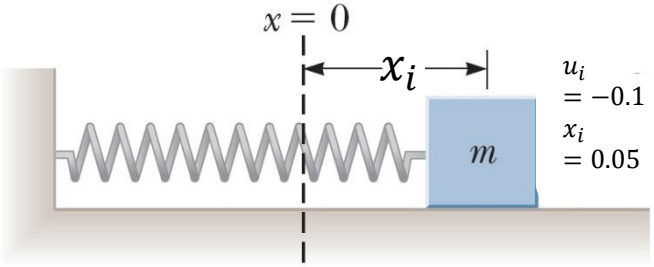
Β) $u_{max} = \omega A = 5 \cdot 0.054 = 0.269 \frac{m}{s}$

Γ) $a_{max} = \omega^2 A = 25 \cdot 0.054 = 1.35 \frac{m}{s^2}$

Δ) $x(t) = 0.054 \cos(5t + 0.12\pi)$

$u(t) = -0.269 \sin(5t + 0.12\pi)$

$a(t) = -1.35 \cos(5t + 0.12\pi)$



Τέλος Διάλεξης